Álgebra III

Examen I

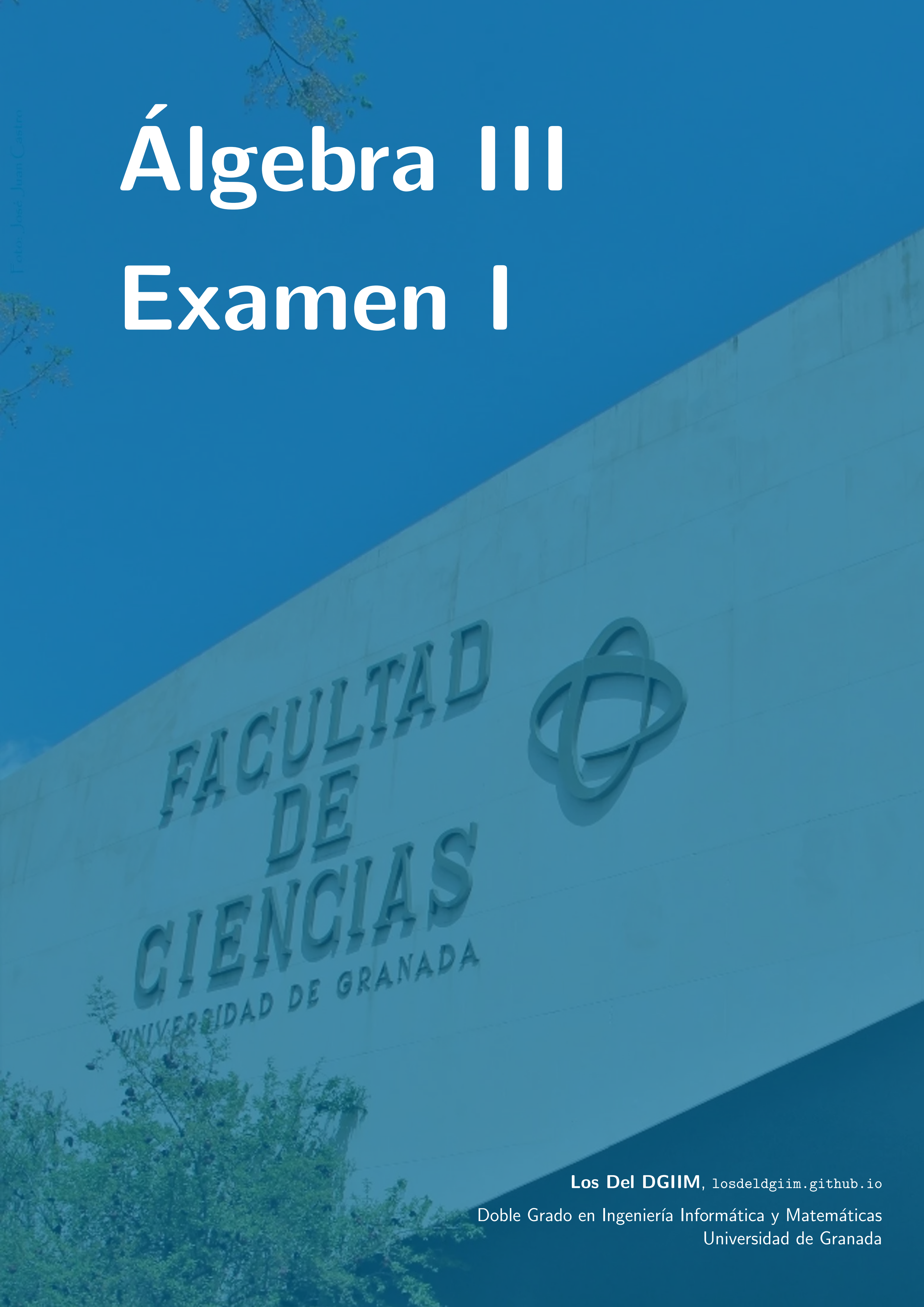

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Álgebra III
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Álgebra III.

Curso Académico 2025/26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Gómez Torrecillas.

Descripción Segundo examen sorpresa.

Fecha 20 de noviembre de 2025.

Duración Una hora.

Ejercicio 1. Calcular $\phi_9 \in \mathbb{Q}[x]$.

Aplicando la fórmula recursiva:

$$\phi_9 = \frac{x^9 - 1}{\phi_1 \phi_3}$$

Y tenemos que:

$$\phi_1 = x - 1$$
$$\phi_3 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

Por lo que:

$$\frac{x^9 - 1}{\phi_1} = \frac{x^9 - 1}{x - 1} = x^8 + x^7 + \ldots + 1$$

Y si dividimos ahora este polinomio entre $x^2 + x + 1$, obtenemos $\phi_9 = x^6 + x^3 + 1$.

Ejercicio 2. Sea $\zeta \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva novena de la unidad, calcular todos los subcuerpos de $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Tenemos que $\mathbb{Q} \leqslant \mathbb{Q}(\zeta)$ es de Galois y en teoría se ha visto que $\mathbb{Q}(\zeta) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_9)$, que tiene cardinal 6. Por tanto, tenemos que:

$$\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta)) = \{\tau_1, \tau_2, \tau_4, \tau_5, \tau_7, \tau_8\}$$

donde τ_j viene determinada por $\zeta \longmapsto \zeta^j$. Tenemos que $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta)) \cong \mathcal{U}(\mathbb{Z}_9)$, que es abeliano y de 6 elementos, luego tiene que ser isomorfo a $\mathbb{Z}_6$, por lo que tenemos 2 subgrupos no triviales de $\mathbb{Z}_6$, con lo que estamos buscando dos subcuerpos de $\mathbb{Q}(\zeta)$ no triviales.
Buscamos ahora un generador de $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))$, sabiendo que $\{1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5\}$ son $\mathbb{Q}-$linealmente independientes.

$$\zeta \overset{\tau_2}{\longmapsto} \zeta^2 \overset{\tau_2}{\longmapsto} \eta^4 \overset{\tau_2}{\longmapsto} \zeta^8$$

Todos ellos distintos de ζ, por lo que τ_2 no es de orden 1, 2, o 3, luego ha de ser de orden 6 (por el Teorema de Lagrange), luego un generador de $G := \text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))$. Además, sabemos que $\tau_2^2 = \tau_4$, así como que $\tau_2^3 = \tau_8$. De esta forma, los subgruposde G son $G, \{id_{\mathbb{Q}(\zeta)}\}, \langle\tau_2^3\rangle, \langle\tau_2^2\rangle$; con $\langle\tau_2^3\rangle$ de 2 elementos y $\langle\tau_2^2\rangle$ de 3 elementos. Por la conexión de Galois, tenemos que calcular los subcuerpos:

$$\mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\tau_8\rangle}, \qquad \mathbb{Q}(\zeta)^{\langle\tau_4\rangle}$$

de los que conocemos su grado:

$$[\mathbb{Q}^{\langle\tau_8\rangle} : \mathbb{Q}] = (G : \langle\tau_8\rangle) = 3, \qquad [\mathbb{Q}^{\langle\tau_4\rangle} : \mathbb{Q}] = 2$$

- Para $\mathbb{Q}^{\langle\tau_4\rangle}$, sabemos que:
$$\zeta^6 + \zeta^3 + 1 = 0$$
Por lo que ζ^3 es raíz de $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, polinomio irreducible (por ser polinomio ciclotómico por ejemplo), con lo que ζ^3 tiene grado 2 sobre $\mathbb{Q}$, por lo que seguro tendremos:
$$\mathbb{Q}(\zeta^3) = \mathbb{Q}^{\langle\tau_4\rangle}$$

- Para $\mathbb{Q}^{\langle \tau_8 \rangle}$, observemos que:

$$\zeta^8 = \zeta^{-1} = \overline{\zeta}$$

con lo que:

$$\zeta \xmapsto{\tau_8} \zeta^8 = \overline{\zeta}$$
$$\zeta^8 \xmapsto{\tau_8} \zeta^{64} = \zeta$$

Por lo que τ_8 mantedrá fijo el elemento $\zeta + \zeta^8$, de donde $\zeta^8 + \zeta \in \mathbb{Q}^{\langle \tau_8 \rangle}$, por lo que $\mathbb{Q}(\zeta^8 + \zeta) \leqslant \mathbb{Q}^{\langle \tau_8 \rangle}$. Finalmente, veamos el grado de $\zeta^8 + \zeta$ y comprobemos que es 3. Supuesto que $\zeta + \zeta^8 \in \mathbb{Q}$ y usando que $\{1, \zeta, \ldots, \zeta^5\}$ son $\mathbb{Q}-$linealmente dependientes, vemos que:

$$\zeta^8 = \zeta^2 \zeta^6 = \zeta^2(-\zeta^3 - 1) = -\zeta^5 - \zeta^2$$

Por lo que:

$$\zeta + \zeta^8 = \zeta - \zeta^5 - \zeta^2$$

que no puede estar en $\mathbb{Q}$, porque esto contradeciría que estos fueran $\mathbb{Q}-$linealmente independientes